Physikalische Praktika der Universität Bremen

Fadenpendel (M1)

Ziel des Versuches

Der Aufbau dieses Versuches ist denkbar einfach: eine Kugel hängt an einem Faden. Der Zusammenhang zwischen der Fadenlänge und der Schwingungsdauer ist nicht schwer zu verstehen. Die Masse der Kugel spielt dabei übrigens keine Rolle. Der Versuch dient dazu, Studien über die Statistik zu betreiben, die Fehlerrechnung praktisch anzuwenden und die Fallbeschleunigung zu bestimmen.

Theoretischer Hintergrund

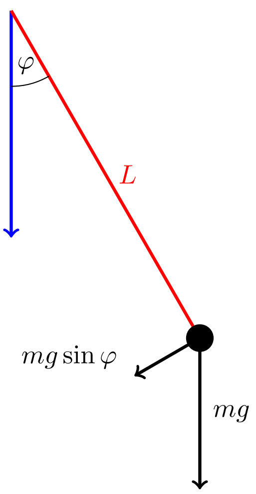

Abbildung 1: Schema zur Verdeutlichung von Formel (1)

Ein Fadenpendel besteht aus einer Kugel mit der Masse m, die an einem Faden hängt, der an einem festen Punkt angebracht ist. Lenkt man die Kugel von ihrer Ruhestellung um den Winkel φ aus, so wirkt eine Rückstellkraft F, die von der Masse der Kugel, der Erdbeschleunigung g und dem Auslenkwinkel abhängt.

$$F = -mg\sin\varphi \quad . \tag{1}$$

Wenn das Pendel schwingt, ist diese Kraft F proportional zur Masse und Beschleunigung a der Kugel.

$$F = m \cdot a \quad .$$

Die Kugel beschreibt einen Bogen um den Aufhängepunkt. Für ein kleines Bogenstück $\Delta x = L\Delta\varphi$, das proportional zur Fadenlänge ist, braucht die Kugel die Zeit Δt und hat die Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Leitet man die Geschwindigkeit v nach der Zeit t ab, erhält man die Beschleunigung. Fa*ss*t man alle Beziehungen zusammen, ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$-mg\sin\varphi = F = ma = mL\ddot{\varphi} \quad .$$

Für kleine Winkel kann man $\sin\varphi$ durch φ ersetzen. Man bezeichnet dann das Pendel als mathematisches Pendel und erhält:

$$-g\varphi = L\ddot{\varphi} \quad .$$

Wenn man zur Zeit $t = 0$ die Kugel loslässt und sie bis zum Winkel φ_0 ausgelenkt hat, ist die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t) \quad .$$

Das Pendel braucht also für eine Periode 2π die Zeit T:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad . \tag{2}$$

Für kleine Auslenkwinkel $\varphi < 5^o$ und T etwa 2 s ist der Unterschied zwischen der exakten Lösung und unserer Näherung kleiner als 0.001 s. Da die gesamte Pendellänge nur sehr ungenau auszumessen ist, bedienen wir uns - bei der Bestimmung der Erdbeschleunigung - eines Tricks und nehmen eine feste Länge L_0 an und variieren die Pendelänge nur um kleine, genau einstellbare Beträge L_i. Damit wird aus (2)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L_0 + L_i}{g}} \quad . \tag{3}$$

Versuchsaufbau und -durchführung

Eine Kugel hängt an einem dünnen Stahldraht, dessen Länge durch einen Schieber und entsprechende Marken in Schritten von 2 cm definiert verändert werden kann. Das Pendel führt beim Auslenken Schwingungen aus, deren Periodendauer mit einer von Hand ausgelösten Stoppuhr bestimmt wird. Die Schwingungsdauer lässt sich genauer bestimmen, wenn man nicht die Zeit einer Periode misst, sondern mehrere, beispielsweise 10. Wiederholt man diese Messung beliebig oft, so wird der berechnete Fehler der Zeitmessung beliebig klein. Da aber auch die Bestimmung der Fadenlänge in der Genauigkeit beschränkt ist, lohnt es nicht, die Zeitmessung zu exakt zu betreiben. Man sollte etwa $\Delta L/L \approx 0,2\Delta T/T$ erreichen.

Für die *Aufgaben 1 und 2* wähle man die gleiche Anfangslänge L_0, die man nicht ausmessen braucht. Man stelle dazu den Schieber exakt auf eine der eingefrästen Ringmarken. Für die *Aufgabe 3* wird die gewählte Fadenlänge L_0 (Anfangslänge) mit dem Schieber immer um exakt 2 cm, also um die Werte $L_i (i = 1, ..., 10)$, verändert und die Schwingungsdauer gemessen. Quadrieren der Gleichung (3) liefert

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2}{g} L_i + \frac{4\pi^2}{g} L_0 \quad . \tag{4}$$

Für *Aufgabe 4* fertige man eine grafische Darstellung $T_i^2 = f(L_i)$ an und bestimme aus dem Anstieg $m = (T_i^2 - T_j^2)/(L_i - L_j) = 4\pi^2/g$ die Fallbeschleunigung g sowie aus dem Schnittpunkt mit der $L-$Achse die Anfangslänge L_0. Tragen Sie unbedingt in das Diagramm die entsprechenden Fehlerbalken ein, um den Fehler Δm des Anstiegs und daraus den Fehler Δg der Fallbeschleunigung zu ermitteln.

Der Trick besteht somit darin, die Erdbeschleunigung recht genau ermitteln zu können, ohne die nur sehr ungenau bestimmbare Pendellänge L_0 zu messen.

Aufgabenstellung

1. Stellen Sie eine feste Pendellänge L_0 ein. Messen Sie dann für n Perioden die Schwingungsdauer $n \cdot T$. Die Zahl n sollte möglichst groß (mindestens 10) sein, wird aber durch die Abnahme der Schwingungsamplitude begrenzt. Wiederholen Sie die Zeitmessung 25 mal.

   (a) Führen Sie diese Messung sowohl beim Nulldurchgang des Pendels als auch am Umkehrpunkt des Pendels durch.

   (b) Berechnen Sie jeweils Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich der Schwingungsdauer und diskutieren Sie die Ergebnisse.

   (c) Zeichnen Sie Histogramme, die die Streuung der Schwingungsdauern illustrieren. Wählen Sie die Intervalle so, dass die Streuung über 5 bis 10 Kästchen geht.

2. Messen Sie beim Nulldurchgang des Pendels (gewählte Länge L_0) 25 mal die Periodendauer für nur eine Schwingung.
   Berechnen Sie die Standardabweichung und vergleichen Sie diesen Wert mit den aus Aufgabe 1 erhaltenen.

3. Messen Sie die Schwingungsdauer für 10 verschiedene Fadenlängen (Messung mit n = 10 und beim Nulldurchgang). Starten Sie mit der Pendellänge L_0 und verändern Sie dann die Länge um 2 cm durch das Verschieben des Schiebers bis zur jeweils nächsten Marke.

4. Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung g und die Anfangslänge L_0 mittels grafischem Geradenausgleich unter Verwendung Ihrer Messdaten aus Aufgabe 3. Berechnen Sie dazu die Quadrate der Schwingungsdauer und die entsprechenden Fehler. Ist ΔT der Fehler der Schwingungsdauer T, dann ist nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung $2T \cdot \Delta T$ der Fehler von T^2. Tragen Sie die Fehlerbalken in die grafische Darstellung $T_i^2 = f(L_i)$ ein, um den Fehler des Anstiegs und daraus den der Fallbeschleunigung zu ermitteln.

Die Berechnungen der Standardabweichungen und Vertrauensbereiche (Aufgaben 1a, 1b, 2) sowie die Anfertigung der grafischen Darstellung (Aufgabe 4) sollen bereits während des Versuches erfolgen und sind Bestandteile des Messprotokolls.

Messprotokollvorschlag

Name, Versuch, Datum, evtl. Versuchsplatz

Aufgabe 1.a: Messung der zehnfachen Schwingungsdauer $10T$ eines Pendels im Nulldurchgang (feste unbekannte Länge L_0)

N	$10T_i$/s	T_i/s	$(T_i - \bar{T})\,/10^{-4}$s	$(T_i - \bar{T})^2\,/10^{-8}$s^2
1				
2				
...				
25				
		Mittelwert $\bar{T} = \frac{1}{25}\sum_1^{25} T_i =$		$\sum v_i^2 = \sum_1^{25} (T_i - \bar{T})^2$

Der Mittelwert darf immer eine Stelle genauer angegeben werden als die Genauigkeit der einzelnen Messung.

Aus $\sum v_i^2 = \sum_1^{25} (T_i - \bar{T})^2$ ermittelt man dann sofort die Standardabweichung (mittlerer Fehler der Einzelmessung) und den Vertrauensbereich (mittlerer Fehler des Mittelwertes).

Aufgabe 1.b: Messung der zehnfachen Schwingungsdauer $10T$ eines Pendels im Umkehrpunkt (feste unbekannte Länge L_0)

Hier kann die gleiche Messtabelle wie bei Aufgabe 1.a verwendet werden. Es werden sich jedoch andere Werte für Standardabweichung und Vertrauensbereich ergeben, da die Messung im Umkehrpunkt ungenauer ist (Warum?)

Aufgabe 2: Messung der einfachen Schwingungsdauer T eines Pendels (feste unbekannte Länge L_0)

N	T_i/s	$(T_i - \bar{T})\,/10^{-3}$s	$(T_i - \bar{T})^2\,/10^{-6}$s^2
1			
2			
...			
...			
25			
	Mittelwert $\bar{T} = \frac{1}{25}\sum_1^{25} T_i =$		$\sum v_i^2 = \sum_1^{25} (T_i - \bar{T})^2$

Sie werden an den Fehlern merken, dass die Messung nur einer Schwingungsperiode ungenauer ist.

Aufgabe 3 : Messung der zehnfachen Schwingungsdauer $10T$ für 10 verschiedene Fadenlängen

n	L_i/cm	$10T_i$/s	T_i/s	T_i^2/s^2
1	2			
2	4			
3	6			
4	8			
5	10			
6	12			
7	14			
8	16			
9	18			
10	20			

Es ist sinnvoll, in der Tabelle gleich T^2 zu berechnen, da es für die grafische Darstellung $T^2 = f(T_i)$ benötigt wird.

Hinweise zur Anfertigung der grafischen Darstellung (Aufgabe 4):

- Fertigen Sie die grafische Darstellung $T^2 = f(T_i)$ an. Wählen Sie dabei den Maßstab der Achsen so, dass Sie das Blatt optimal ausnutzen.
- Zeichnen Sie bei allen Messpunkten die Fehlerbalken für ΔL_i (Größtfehler abschätzen) und für T^2 ein. Der Fehler für T^2 ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung zu $2T \cdot \Delta T$, wobei der Fehler des Messverfahrens bereits in Aufgabe 1 ermittelt wurde. Die in Aufgabe 1 erhaltene Standardabweichung bei Messung der zehnfachen Schwingungsdauer im Nulldurchgang des Pendels, sollte in einen prozentualen Fehler umgerechnet werden, um den bei verschiedenen Fadenlängen erhaltenen Schwingungsdauern die Fehlerbalken zuordnen zu können.
- Legen Sie durch die Punkte eine Ausgleichsgerade mit dem Lineal. Beachten Sie dabei die Hinweise aus dem Skript "Einführung in die Fehlerrechnung und grafische Auswertung" hinsichtlich des Schwerpunktes der Ausgleichsgeraden. Bestimmen Sie den Anstieg und bestimmen Sie daraus die Erdbeschleunigung.
- Legen Sie zwei weitere Geraden (kleinster und größter möglicher Anstieg) durch die Messpunkte. Bestimmen Sie deren Anstiege und ermitteln Sie daraus den Fehlerbereich der gemessenen Erdbeschleunigung
- Für die Fehlerdiskussion (z. B. mögliche Ursachen für Abweichungen des Messergebnisses vom Literaturwert) sei hier die Abhängigkeit der Schwingungsdauer vom Auslenkwinkel des Pendels gegeben
  $T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{9}{64}\sin^2\frac{\varphi}{2} + ...\right)$,
  wobei hier T_0 die Schwingungsdauer bei sehr kleiner Auslenkung ist.