Probeklausur

Wichtige Hinweise

- Sie müssen (bei der tatsächlichen Klausur) ein Maple-Worksheet als Ergebnis abgeben.
- Das Worksheet muss entsprechend übersichtlich gestaltet werden. Die einzelnen Aufgaben und Ergebnisse sollten so dokumentiert werden, dass es nachvollziehbar ist, was und warum gemacht wurde.
- Sie sollten jede Aufgabe mit einem `restart` Befehl anfangen.
- Das Worksheet muss mit den Menübefehlen `Edit/Remove Output/From worksheet` und danach `Edit/Execute/Worksheet` *fehlerfrei* durchlaufen. Nur das, was nach diesen Befehlen im Worksheet erscheint, wird bewertet.

Aufgaben

1. (a) Erstellen Sie eine Liste A der ersten fünfzig geraden Zahlen.

   (b) Erstellen Sie damit eine Liste B der Zahlen $e^{\frac{ig\pi}{5}}$, wobei g alle Elemente von A durchläuft.

   (c) Bestimmen Sie die Anzahl der unterschiedlichen Elemente in B und weisen Sie den Wert der Variable n zu.

2. Gegeben sei der Polynombruch

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

   (a) Stellen Sie den Bruch faktorisiert dar.

   (b) Ermitteln Sie die Nullstellen des Nenners.

   (c) Stellen Sie den Bruch und dessen Zähler und Nenner in einer gemeinsamen Abbildung dar.

   (d) Markieren Sie weiterhin in der selben Abbildung die Positionen der Polstellen des Bruches auf der x-Achse (z.B. mit gut sichtbaren Kreisen). Wählen Sie für die Abbildung einen relevanten Bereich entlang der x- und der y-Achse, sodass sowohl alle Polstellen als auch die Funktionen sinnvoll dargestellt werden.

3. Gegeben seien zwei festgehaltene positive Ladungen mit der Ladung Q auf der y-Achse, die jeweils um den Abstand $\frac{d}{2}$ von der x-Achse entfernt sind (Abbildung 1). Es soll die Bewegung einer negativen Ladung (mit der Ladung q) im Feld der beiden positiven Ladungen untersucht werden, wenn diese Ladung vom Koordinatenursprung entlang der x-Achse geringfügig ausgelenkt wird.

   Bei einer Auslenkung x wirkt auf die Ladung entlang der x-Achse die Coulombkraft

$$F = -k\,q\,Q\frac{x}{(d^2 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

   (a) Entwickeln Sie die Coulombkraft $F(x)$ um den Punkt $x = 0$ in eine Taylorreihe bis erster Ordnung.

   (b) Teilen Sie Maple mit, dass das Symbol d eine reelle Zahl größer Null repräsentiert.

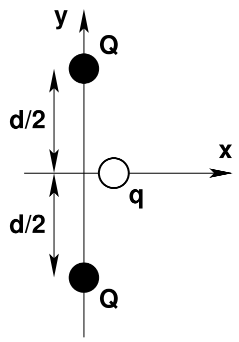

Abbildung 1: Anordnung der Ladungen bei Auslenkung entlang der x-Achse.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t))$$

für die Bewegung der Ladung *analytisch*, indem Sie für die Kraft F den genäherten Ausdruck verwenden. Als Lösung sollten Sie eine harmonische Schwingung erhalten. Welche Kreisfrequenz hat die Schwingung?

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung **numerisch** sowohl für die genäherte als auch für die exakte Kraft mit folgenden Anfangsbedingungen:

- Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m.
- Keine Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

Verwenden Sie dabei folgende Parameter (alle in SI-Einheiten):

- Abstand der festen Ladungen $d = 5 \cdot 10^{-10}$ m.
- Masse der bewegten Ladung: $m = 9{,}109382 \cdot 10^{-31}$ kg.
- Ladung der bewegten Ladung: $q = 1{,}602176 \cdot 10^{-19}$ C.
- Ladung der festen Ladungen: $Q = 2q$.
- Vorfaktor $k = 1{,}438008 \cdot 10^{11}$ Am/Vs.

(e) Stellen Sie die beiden Lösungen (Auslenkungen) in einer Abbildung zwischen $t = 0$ s und $t = 1 \cdot 10^{-15}$ s dar.

(f) Stellen Sie die exakte und die mit Taylor-Reihe genäherte Coulombkraft in einer Abbildung zwischen $x = 0$ m und $x = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m dar. Erklären Anhand dieser Abbildung, warum die Schwingung mit der genäherten Kraft schneller ist.

4. Gegeben sei ein Kegel mit der Höhe H. Der Radius seiner Grundfläche sei R.

(a) Definieren Sie eine Maple-Funktion, die zu einem Objekt f dessen Integral über das Kegelvolumen zuordnet:

$$f \longrightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{R-z\,R/H} r f \, dr dz d\phi$$

(b) Teilen Sie Maple mit, dass die Symbole H und R reelle Größen größer Null repräsentieren.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Kegels V, indem Sie 1 über das Volumen ausintegrieren.

(d) Berechnen Sie die Dichte des Kegels ρ, indem Sie seine Masse M durch das Volumen teilen.

(e) Berechnen Sie die Koordinaten des Kegelschwerpunktes, indem Sie den Vektor

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\rho}{M}\begin{bmatrix} \int\int\int r\,r\,\cos(\phi)\,drdzd\phi \\ \int\int\int r\,r\,\sin(\phi)\,drdzd\phi \\ \int\int\int r\,z\,drdzd\phi \end{bmatrix}$$

berechnen. Die Integrale laufen über das Kegelvolumen. Verwenden Sie dabei die `map`-Funktion in Maple!

(f) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich der z-Achse Θ_z, indem Sie das Integral

$$\Theta_z = \rho \int \int \int r\, r^2 \, drdzd\phi$$

berechnen. Das Integral läuft über das Kegelvolumen.