

Wissenschaftliches Programmieren

Bálint Aradi

<http://www.bccms.uni-bremen.de/cms/people/b-aradi/>

5. Versionsverwaltung für Einzelentwickler

Verwendete Literatur:

- **Scott Chacon: Pro Git** (Kapitel 1 und 2)
- [GitHowto](#)

Aufgaben eines Versionsverwaltungssystems:

- Entwicklungsgeschichte (**Schnappschnüsse über den Zustand des Codes zu verschiedenen Zeitpunkten**) festhalten
- Entwicklungskoordination bei mehreren Entwicklern erleichtern
- Parallele entwicklung von mehreren Versionen erleichtern

Zentralisierte Versionsverwaltung (CVS, Subversion, ...):

- Zentraler Server enthält Versionsdatenbank (Repository)
- Programmier müssen jedesmal Verbindung zum Server aufbauen, wenn Sie eine neue Version des Codes festhalten wollen.

Dezentralisierte Versionsverwaltung (Git, Mercurial, Bazaar, ...):

- Jeder Entwickler hat die gesamte Versionsgeschichte **lokal** auf seinem Rechner
- Neue Versionen des Codes werden lokal festgehalten und später zusammengeführt (**keine ständige Netzwerkverbindung** nötig)

Szenario:

- Ein neues Programm wird entwickelt (z.B. einfache Gausselimination)
- Programm wird getestet, es funktioniert.
- Programm wird erweitert/umgeschrieben (z.B. Pivotverfahren eingebaut)
- Programm wird erweitert/umgeschrieben (z.B. Daten aus Datei eingelesen)
- :
- *Hoppala! Eine Funktionalität, die früher mit Sicherheit in Ordnung war, funktioniert nicht mehr (z.B. für gewisse Matrizen kommt das falsche Ergebnis raus.)*

Problemlösung mit Versionsverwaltung:

- Man sucht in der Versionsgeschichte so lange rückwärts (evtl. mit Bisektion), bis man die letzte funktionierende Version gefunden hat.
- Man untersucht die Veränderung zur nächsten Version (wo es das erste mal nicht funktioniert), um festzustellen, was die richtige Funktion zerstört hat und behebt den Fehler.

Sich der Versionsverwaltung vorzustellen

- Name und Emailadresse eintragen, damit diese beim Loggen verwendet werden:

```
git config --global user.name "Bálint Aradi"  
git config --global user.email "aradi@uni-bremen.de"
```

↑ ↑ ↙
Befehl Unterbefehl Option

- Standardtools (Editor und Codevergleicher) festlegen:

```
git config --global core.editor emacs  
git config --global diff.tool kdiff3  
git config --global merge.tool kdiff3
```

- Wenn die Option „--global“ angegeben wird, gelten die Einstellungen für jedes git-Projekt unter dem **aktuellen** Unixaccount automatisch.
- Die globalen Optionen sind in der Datei **~/.gitconfig** gespeichert.
- Alle aktuellen Optionen auflisten (systemweite, globale und projektspezifische)

```
git config --list → user.name=Bálint Aradi  
                          user.email=aradi@bccms.uni-bremen.de  
                          core.editor=emacs
```

Repository einrichten

- Projektrepository erzeugen:

```
mkdir ~/gauss_elimination  
cd ~/gauss_elimination  
git init
```

← Erzeugt leere Versionsdatenbank in
~/gauss_elimination/.git

- Danach können Dateien im Verzeichnis ~/gauss_elimination und die Dateien in dessen Unterverzeichnissen unter Versionsverwaltung gestellt werden.
- Dateien im .git Verzeichniss dürfen **nicht manuell verändert** werden.
- Wenn Projektverzeichnis als ganzes (inkl. .git-Verzeichnis) kopiert wird, geht auch die Verionsgeschichte mit.
- Datei(en) im Projekt erzeugen, editieren (z.B. gauss_elim.f90)

```
emacs gauss_elim.f90 (&)
```

← Editor im Hintergrund starten

Versionsverwaltungsstatus ändern

- Status der Dateien (bezüglich Versionsverwaltung) abfragen

```
git status
```

```
# On branch master ← sog. master branch (Hauptzweig der Entwicklung)
```

```
#
```

```
# Initial commit ← Bis jetzt noch nichts unter VV gestellt
```

```
#
```

```
# Untracked files: ← Dateien im Projektverzeichnis,  
# (use "git add <file>..." to include ...) die noch nicht unter VV stehen  
# (nicht verfolgte Dateien)
```

```
# gauss_elimination.f90
```

- Nicht verfolgte Dateien müssen explizit unter VV gestellt werden:

```
git add gauss_elimination.f90
```

```
git status
```

```
# :
```

```
#
```

```
# Changes to be committed: ← Liste der Dateien, die beim  
# (use "git rm --cached <file>..." to ... nächsten Schnappschuss  
# (commit) festgehalten werden.  
# new file:   gauss_elimination.f90 (stage-Bereich)
```

Dateien im stage-Bereich

- Beim „git add“ werden die Dateien in den sog. **stage**-Bereich gestellt
- Dateien im stage-Bereich werden beim nächsten Schnappschuss (**commit**) festgehalten.
- Dateien im stage-Bereich haben den **Zustand, den sie beim Ausführen des entsprechend „git add“ Befehls gehabt haben**. Werden sie nachträglich geändert, muss (wenn gewünscht) wieder „git add“ ausgeführt werden, damit ihr Status im stage-Bereich aktualisiert wird.

```
# wenn gauss_elimination.f90 verändert wurde:
```

```
git status
```

```
:
```

```
# Changes to be committed:
```

```
:
```

```
#       new file:   gauss_elimination.f90
```

```
#
```

```
# Changed but not updated:
```

```
#
```

```
#       modified:   gauss_elimination.f90
```

```
git add gauss_elimination.f90
```

Arbeitsverzeichnis
(~/gauss_elim)

git add

stage-Bereich

Bühnenbild erstellen (commit)

- Schnappschuss über den Stand der Dateien im Stage-Bereich erstellen:

```
git status
```

```
:
```

```
# Changes to be committed:
```

```
:
```

```
#       new file:   gauss_elimination.f90
```

```
#
```

```
git commit
```

```
[master (root-commit) d910d55] Initial checkin of the working Gauss-  
elimination algorithm.
```

```
 1 files changed, 93 insertions(+), 0 deletions(-)  
 create mode 100644 gauss_elimination.f90
```

```
git status
```

```
# On branch master
```

```
nothing to commit (working directory clean)
```

- ▶ Startet einen Editor für eine temporäre Datei, in die man eine kurze Beschreibung eingeben soll. Logmeldung wird mit dem Schnappschuss über die Dateien festgehalten. (Datei speichern, Editor verlassen)

Eingegebene
Beschreibung

Versionsgeschichte

- Festgehaltene Versionen (zusammen mit den Logmeldungen) anzeigen:

`git log`

```
commit d910d55495eb9ce34637d305bd5afcffbe731268 ← Schnappschuss-  
Author: Bálint Aradi <balint.aradi@bccms.uni-bremen.de> Prüfsumme  
Date: Mon Apr 29 11:42:36 2013 +0200
```

← Logmeldung

Initial checkin of the working Gauss-elimination algorithm.

- Einzelne **Schnappschüsse** durch ihre **Prüfsummen** identifiziert
- Man kann auch **verkürzte Prüfsummen** verwenden, solange eindeutig
- Mit Option `--oneline` werden verkürzte Prüfsummen ausgegeben.
- Wenn mehrere Versionen festgehalten wurden, werden im Log immer die **neueren Versionen als erstes** angezeigt.

`git log --oneline`

```
10cb29e Adding README file.  
d910d55 Initial checkin of the working Gauss-elimination algorithm.
```

← letztes checkin

← vorletztes checkin

Git-Workflow

0. Git global für den Unix-Account einrichten

git config --global ...

1. Repository für ein Projekt erstellen

git init

➤ 2. Dateien zum Projekt geben, Dateien verändern

3. Dateien für den Schnappschuss vorbereiten

(Dateien mit aktuellem Stand in stage-Bereich kopieren)

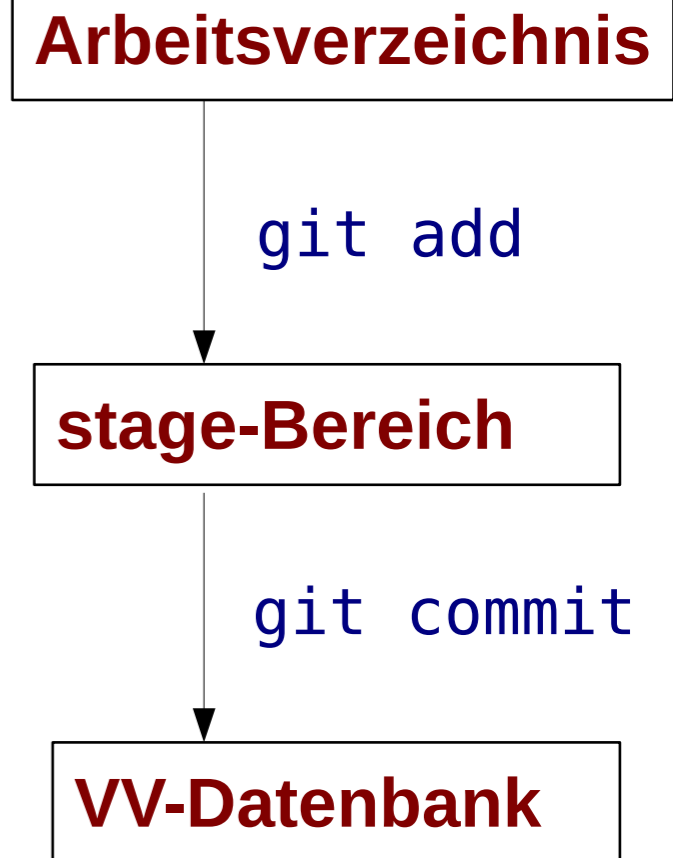
git add ...

4. Zustand des Projektes festhalten

(Dateien im stage-Bereich fotografieren/einchecken)

git commit

5. Weiterentwickeln



Bemerkungen

- Es sollte in der Regel dann eingecheckt werden, wenn die Implementation eines neuen Features abgeschlossen wurde.
- Anhand der Logmeldungen sollte **Entwicklungsverlauf nachvollziehbar** sein.
- Die **Menge der Veränderungen** am Code zwischen zwei Schnappschüssen sollte **überschaubar** bleiben.
- Kürzere Logmeldungen können auch direkt in der Kommandozeile mit der Option „-m“ angegeben werden:

```
git commit -m "Initial checkin with working ..."
```

- Man kann den mit einem Befehl alles auf Stage setzen was sich geändert hat:

```
git add -u
```



Fügt alle Dateien dem Stage-Bereich zu, die unter Versionsverwaltung stehen und seit dem letzten Checkin geändert wurden.

Dateien umbenennen/löschen

- Datei umbenennen (wird auch im Arbeitsverzeichnis umbenannt):

```
git mv README README.txt
git status
# On branch master
# Changes to be committed:
#   (use "git reset HEAD <file>..." to unstage)
#
#       renamed:    README -> README.txt
```

- Datei vom Arbeitsverzeichnis löschen und von **künftigen** Schnappschüssen entfernen:

```
git rm README
git status
# On branch master
# Changes to be committed:
#   (use "git reset HEAD <file>..." to unstage)
#
#       deleted:    README ← Datei wird ab nächsten commit nicht mehr verfolgt
```

Veränderungen untersuchen

- Unterschiede zwischen **aktueller Version im Arbeitsverzeichnis** und **Version im Repository/Stage** Bereich:

```
git diff gauss_elimination.f90
```

```
diff --git a/gauss_elimination.f90 b/gauss_elimination.f90
index ea7aefe..c35a48f 100644
```

```
--- a/gauss_elimination.f90
```

```
+++ b/gauss_elimination.f90
```

```
@@ -8,7 +8,7 @@ program GaussElimination
    implicit none
```

```
    !! precision
```

```
- integer, parameter :: dp = selected_real_kind(15, 300)
```

```
+ integer, parameter :: dp = selected_real_kind(14, 300)
```

```
    !! Minimal leading element
```

```
    real(dp), parameter :: minpivot = 1e-10_dp
```

Zeile
entfernt

Zeile dazugefügt

- Ohne Dateinamen werden die Änderungen für alle geänderten Dateien angezeigt:

```
git diff
```

Veränderungen untersuchen

- Veränderungen zwischen zwei eingechekten Versionen werden durch die Angabe der entsprechenden Versionsprüfnummern angezeigt:

```
git diff 10cb29e d910d55 -- gauss_elimination.f90
```

- Veränderungen können auch graphisch angezeigt werden:

optional, wenn fehlt für alle Dateien

```
git difftool
```

```
Viewing: 'gauss_elimination.f90'  
Hit return to launch 'kdiff3':
```

The screenshot shows a side-by-side comparison of two versions of the Fortran file 'gauss_elimination.f90'. The left pane (A) represents the original version, and the right pane (B) represents the modified version. The only change is on line 7, where the precision parameter for 'selected_real_kind' was changed from 15 to 14. This change is highlighted in yellow in both panes. The rest of the code, including the program structure, variable declarations, and the main loop, is identical in both versions.

Änderungen im Arbeitsverzeichnis rückgängig machen

- Datei im Arbeitsverzeichnis **auf letzte eingechekte Version zurücksetzen:**

```
git status
```

```
# On branch master
```

```
# Changed but not updated:
```

```
#   (use "git add <file>..." to update what will be committed)
```

```
#   (use "git checkout -- <file>..." to discard changes in working  
directory)
```

```
#
```

```
#       modified:   gauss_elimination.f90
```

```
#
```

```
no changes added to commit (use "git add" and/or "git commit -a")
```

```
git checkout -- gauss_elimination.f90
```

```
git status
```

```
# On branch master
```

```
nothing to commit (working directory clean)
```

Vorsicht, checkout überschreibt Dateien im Arbeitsverzeichnis!

Änderungen im Stage-Bereich rückgängig machen

- Eine Datei kann aus dem Stage-Bereich wieder entfernt werden. Der Inhalt der Datei im Arbeitsverzeichnis wird dabei nicht verändert.

```
git st
```

```
# On branch master
```

```
# Changes to be committed:
```

```
#   (use "git reset HEAD <file>..." to unstage)
```

```
#
```

```
# modified:   README
```

```
#
```

```
git reset HEAD README
```

```
Unstaged changes after reset:
```

```
M README
```

```
git st
```

```
# On branch master
```

```
# Changes not staged for commit:
```

```
#   (use "git add <file>..." to update what will be committed)
```

```
#   (use "git checkout -- <file>..." to discard changes in  
working directory)
```

```
#
```

```
# modified:   README
```


Frühere Versionen untersuchen

- Frühere Version via Prüfsumme auswählen und Dateien im Arbeitsverzeichnis auf den entsprechenden Stand ändern:

```
git log --oneline
```

```
10cb29e Adding README file.
```

```
d910d55 Initial checkin of the working Gauss-elimination algorithm.
```

```
git checkout d910d55
```

```
Note: checking out 'd910d55'.
```

```
:
```

```
HEAD is now at d910d55... Initial checkin of the working Gauss-elimination algorithm.
```

```
git status
```

```
# Not currently on any branch.
```

```
nothing to commit (working directory clean)
```

- In diesem Zustand kann man den Code untersuchen, ob der Fehler in einer gegebenen Version schon da war.
- Es sollten **keine Änderungen vorgenommen und eingchecked** werden, da sie beim Zurückwechsell zum letzten Stand verlorengehen würden.

Zurückwechseln auf den aktuellen Stand

- Wenn der Fehler gefunden wurde, sollte er im aktuellen Stand der Entwicklung behoben werden.
- Zurückwechseln zum aktuellen Projektstand:

```
git checkout master
```

```
Previous HEAD position was d910d55... Initial checkin of the working..  
Switched to branch 'master'
```

```
git status
```

```
# On branch master
```

```
nothing to commit (working directory clean)
```

- Nach dem Zurückwechseln zum aktuellen Stand sollte der Fehler behoben werden und die Änderungen eingchecked werden.

git Aliases

- Häufig benutzte git-Befehle können mit **aliases** abgekürzt werden:

```
git config --global alias.ci commit           → git ci
git config --global alias.co checkout         git co ...
git config --global alias.st status           git st
git config --global alias.gdiff difftool      git gdiff ...
git config --global alias.slog "log           git slog
--pretty=format:\"%h | %ad | %s%d [%an]\"
--graph --date=short --all"
```

Versionen taggen

- Wenn eine Version eine spezielle Bedeutung hat (z.B. veröffentlichte Version des Projektes), kann diese mit speziellen Namen versehen werden.
- Wir verwenden die sogenannten „**annotated tags**“.
- Per default wird die letzte eingechekte Version mit dem Tag versehen

```
git slog
```

```
* ba8a4bd | 2013-04-29 | Test (HEAD, master) [Bálint Aradi]  
* 10cb29e | 2013-04-29 | Adding README file. [Bálint Aradi]  
* d910d55 | 2013-04-29 | Initial checkin of the working ...
```

```
git tag -a v1.0
```

```
git slog
```

```
* ba8a4bd | 2013-04-29 | Test (HEAD, v1.0, master) [Bálint Aradi]
```

- Beliebige Versionen können mit Angabe der Versionsprüfsumme getagt werden:

```
git tag -a v0.1 d910d55
```

- Statt Revisionsprüfsummen kann überall auch der Tagname genutzt werden:

```
git diff v0.1 v1.0
```

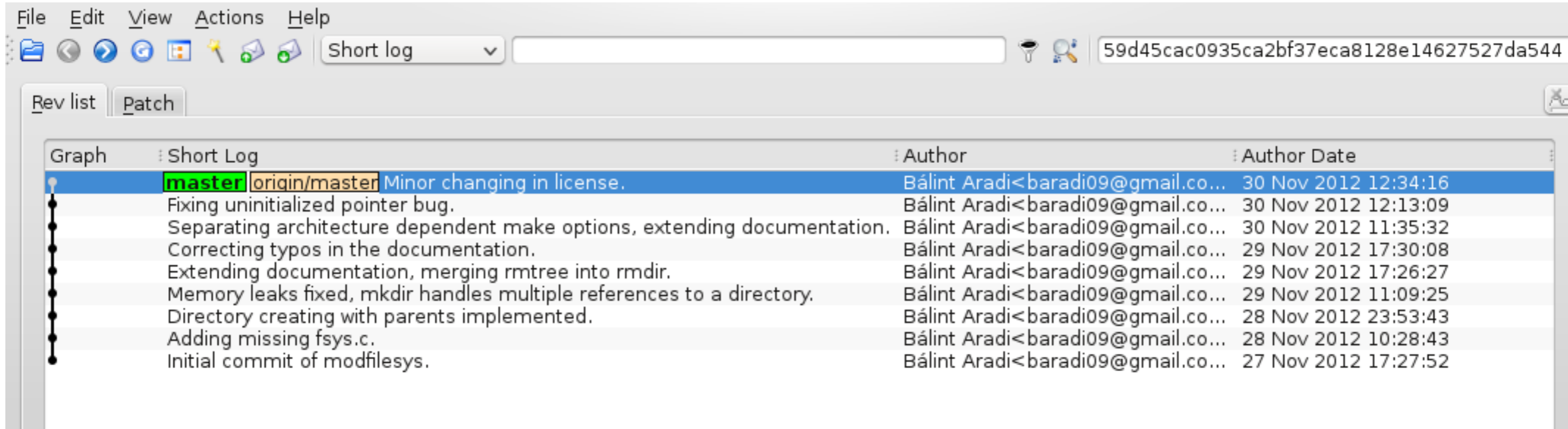
git-Hilfe, graphische Oberflächen

- Zu jedem git-Befehl ist eine Hilfeseite mit „git help“ verfügbar:

`git help commit` ← Zeigt die Hifeseite für das commit-Befehl an

- Es gibt diverse graphische Oberflächen (gitk, qgit, ...) um Revisionsgeschichte anzuzeigen bzw. Git-Befehle auszuführen:

`qgit` &



Repository klonen

- Bestehende Projektrepositories (inkl. Geschichte) klonen:

```
git clone http://www.bccms.uni-bremen.de/fileadmin/BCCMS/CMS  
/personen/aradi/wissprog/gausseim.git
```

```
git slog
```

```
* df9c53d | 2013-06-17 | Changed to LAPACK-solver...  
* 0cc10ed | 2013-05-25 | Efficient storage for L, U and P implemented...  
* 69cb0fe | 2013-05-25 | Program for automatic input generation added...  
* f3fc43d | 2013-05-24 | Autotesting for linearly dependent equations...
```

- Im geklonten Repository kann man wie in einem eigenem arbeiten, neue Versionen einchecken, etc.

git – Bemerkungen

- Bitte für genaue Form und weitere Optionen der Befehle die Hilfeseiten lesen!
- Nach jeder größeren (nicht trivialen) Erweiterung sollte eingechekt werden.
Faustregel: Ein anderer Programmierer sollte die Veränderungen zwischen zwei Versionen noch (mit Hilfe der eingechekten Mitteilung) überblicken können.
- Versionsgeschichte ist im Unterverzeichnis `.git` gespeichert. Wird das Verzeichnis (samt `.git`) kopiert, bleibt die Versionsinformation erhalten.
- Die git-Befehle müssen in dem Verzeichnis ausgeführt werden, in dem sich der `.git` Unterverzeichnis befindet (*Quellcode-Root-Verzeichnis*), oder in einem Unterverzeichnis davon.
- git-Befehle (sofern keine explizite Dateinamen angegeben) beziehen sich auf den gesamten Quellcode-Verzeichnisbaum (Quellcode-Root + Unterverzeichnisse)
- Versionsprüfsummen werden global für alle Dateien vergeben: eine Version enthält alle Dateien des Projektes. Bei den Dateien, die beim Checkin nicht im Stage-Bereich waren, wird der Stand vom letzten Checkin genommen.

Aufgabe 1

- Stellen Sie die aktuelle Version Ihrer Gauss-Elimination unter Versionskontrolle und checken Sie es ein.
- Erweitern Sie die Gauss-Elimination, damit diese die Spezifikationen vom letzten Mal erfüllt.
- Erweitern Sie das Programm, damit es die Daten von einer externen Datei lesen kann und checken Sie diese Version mit entsprechender Mitteilung ein. Stellen Sie auch eine Beispiel-Input-Datei unter Versionskontrolle (gauss.inp.example).
- Schreiben Sie eine kurze Dokumentation in eine Textdatei (README.txt) über die Bedienung des Programmes (z. B. wie die Inputdatei aufgebaut sein muss) und stellen Sie diese unter Versionskontrolle. Checken Sie diese ein.
- Versehen Sie diese Version des Codes mit dem Tag v0.1

Aufgabe 1 (Spezifikation)

- Schreiben Sie das Gauss-Eliminationsprogramm so um, dass die Eingabe von einer Datei namens „gauss.inp“ erfolgt.
- Die einzelnen Zeilen der Datei sollen folgende Daten enthalten:
 - Anzahl_der_Variablen
 - Koeffizienten der 1. Reihe der Matrix
 - Koeffizienten der 2. Reihe der Matrix
 - :
 - Koeffizienten der letzten Zeile der Matrix
 - Koeffizienten des Vektors auf der rechten Seite

Möglicher Input:

```
3
2.0 4.0 4.0
1.0 2.0 -1.0
5.0 4.0 2.0
1.0 2.0 4.0
```

Aufgabe 2

- In der Numerik wird die Gauss-Elimination meistens als LR-Zerlegung realisiert. Dabei wird die Matrix A als Produkt $\mathbf{P} * \mathbf{A} = \mathbf{L} * \mathbf{R}$ zerlegt, wobei \mathbf{P} eine Permutationsmatrix, \mathbf{R} eine obere Dreiecksmatrix (gauss-eliminierte Form des Gleichungssystems) und \mathbf{L} eine untere Dreiecksmatrix mit 1-en in der Diagonale ist, die die Koeffizienten für die Linearkombinationen der Zeilen enthält.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.0 & 4.0 & 4.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 2.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 2.0 \end{array} * \begin{array}{ccc|ccc} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 2.0 \\ 0.4 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 2.4 & 3.2 \\ 0.2 & 0.5 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -3.0 \end{array} = \begin{array}{ccc|ccc} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 & 4.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.4 & 3.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array}$$

- Gleichungssystem $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ wird mit Hilfe von \mathbf{P} , \mathbf{L} und \mathbf{R} in 2 Schritten gelöst:

$$\mathbf{L} \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{b} \quad \text{durch „vorwärtseinsetzen“ nach } \mathbf{y} \text{ aufgelöst.}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{durch „rückwärtseinsetzen“ nach } \mathbf{x} \text{ aufgelöst.}$$

- Schreiben Sie das Gausseliminationsprogramm so um, dass es zuerst die Matrizen \mathbf{P} , \mathbf{L} und \mathbf{R} aus \mathbf{A} erzeugt, und dann durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen den Lösungsvektor \mathbf{x} ermittelt. (Vergessen Sie nicht, das fertige Program in das Repository einzuchecken...)

Aufgabe 2 (Beispiel für die LR-Zerlegung)

P			L			R			
1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	2.0	4.0	4.0	
0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	2.0	-1.0	
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	5.0	4.0	2.0	
0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	5.0	4.0	2.0	$\xrightarrow{-0.2 * Z.1}$ $\xrightarrow{-0.4 * Z.1}$
0.0	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0	2.0	-1.0	
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	2.0	4.0	4.0	
0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	5.0	4.0	2.0	
0.0	1.0	0.0	0.2	1.0	0.0	0.0	1.2	-1.4	
1.0	0.0	0.0	0.4	0.0	1.0	0.0	2.4	3.2	
0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	5.0	4.0	2.0	$\xrightarrow{-0.5 * Z.2}$
1.0	0.0	0.0	0.4	1.0	0.0	0.0	2.4	3.2	
0.0	1.0	0.0	0.2	0.0	1.0	0.0	1.2	-1.4	
0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.0	5.0	4.0	2.0	
1.0	0.0	0.0	0.4	1.0	0.0	0.0	2.4	3.2	
0.0	1.0	0.0	0.2	0.5	1.0	0.0	0.0	-3.0	

Aufgabe 2 (Beispiel für Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{b} & & \mathbf{P} * \mathbf{b} \\
 1.0 & \longrightarrow & 4.0 \\
 2.0 & & 1.0 \\
 4.0 & & 2.0
 \end{array}$$

Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{ccc}
 1.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{Y1} & = & 4.0 \\
 0.4 & 1.0 & 0.0 & * \mathbf{Y2} & = & 1.0 \\
 0.2 & 0.5 & 1.0 & \mathbf{Y3} & = & 2.0
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{l}
 \mathbf{Y1} = 4.0 \\
 \mathbf{Y2} = 1.0 - 0.4 * \mathbf{Y1} = -0.6 \\
 \mathbf{Y3} = 2.0 - 0.2 * \mathbf{Y1} - 0.5 * \mathbf{Y2} = 1.5
 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{ccc}
 5.0 & 4.0 & 2.0 & \mathbf{X1} & = & 4.0 \\
 0.0 & 2.4 & 3.2 & * \mathbf{X2} & = & -0.6 \\
 0.0 & 0.0 & -3.0 & \mathbf{X3} & = & 1.5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{X3} = 1.5 / -3.0 = -0.5 \\
 \mathbf{X2} = (-0.6 - 3.2 * \mathbf{X3}) / 2.4 = 0.41666\dots \\
 \mathbf{X1} = (4.0 - 4.0 * \mathbf{X2} - 2.0 * \mathbf{X3}) / 5.0 = 0.66666\dots
 \end{array}$$